**Лекція 10**

**Взаємне розташування прямих і площин**

**10.1. Взаємне розташування площин**

Нехай дано дві площини, що задані в прямокутній системі координат своїми загальними рівняннями:

Один з двох кутів між цими площинами (позначимо його через ) дорівнює куту між їх нормальними векторами  і  (рис. 9.1), а інший кут дорівнює 

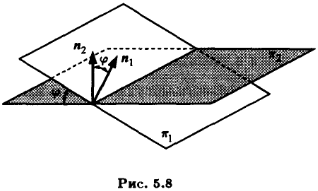


Рис 10.1. Кут між площинами

Тому, згідно з визначенням скалярного добутку,



Якщо дві дані площини перпендикулярні, то це еквівалентно тому, що їх нормальні вектори ортогональні. Критерієм ортогональності двох векторів є рівність нулю їх скалярного добутку. Оскільки скалярний добуток двох векторів, заданих в координатах, обчислюється як сума добутків їх однойменних координат, критерієм перпендикулярності площин  і  є виконання рівності 

Аналогічно дві площини паралельні, якщо їх нормальні вектори колінеарні. Критерієм колінеарності двох векторів є рівність відношень їх координат. Тому умова паралельності двох площин записується у вигляді подвійного рівності 

*Зауваження*. *Ця подвійна рівність має сенс і в тому випадку, коли в знаменнику одного з дробів стоїть нуль. Це означає, що і в чисельнику дроба стоїть нуль*.  
Паралельні площини можуть збігатися або бути різними. Ліві частини загальних рівнянь співпадаючих площин відрізняються на ненульовий числовий множник, і це можна записати як рівність відношень відповідних коефіцієнтів їх рівнянь: 

Випадок відповідає тому, що площини паралельні, але не збігаються.

**10.2. Кут між прямими**

Кут між двома прямими можна знайти, використовуючи напрямні вектори прямих. Гострий кут між прямими дорівнює куту між їх напрямними векторами (рис. 10.2) або є доповнюючим до нього, якщо кут між напрямними векторами тупий. Таким чином, якщо для прямих ** і ** відомі їхні напрямні вектори ** і **, то гострий кут  між цими прямими визначається через скалярний добуток: .

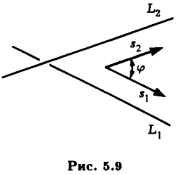


Рис. 10.2. Кут між прямими

Використовуючи формули для обчислення довжини вектора і скалярного добутку векторів в координатах, отримаємо:

,

де ** і **.

**10.3. Взаємне розташування прямих**

Для двох прямих у просторі можливі чотири випадки:  
- прямі збігаються;  
- прямі паралельні (але не збігаються);  
- прямі перетинаються;  
- прямі є мимобіжними, тобто не мають спільних точок і непаралельні.

Нехай прямі  і  задані канонічними рівняннями:



Для кожної прямої з її канонічних рівнянь відразу визначаємо точку на ній  і координати напрямних векторів ** для , і ** для .

Якщо прямі збігаються або паралельні, то їх напрямні вектори ** і ** колінеарні, що рівносильно рівності відношень координат цих векторів:



Якщо прямі співпадають, то напрямним векторам колінеарен і вектор : 

Ця подвійна рівність також означає, що точка  належить прямій . Отже, умовою співпадіння прямих є виконання останніх двох рівностей одночасно.

Якщо прямі перетинаються або є мимобіжними, то їх напрямні вектори неколінеарні, тобто умова  порушується. Прямі, що перетинаються належать одній площині і, отже, вектори **, ** і  є компланарними. Умову компланарності цих векторів можна записати через змішаний добуток, як рівність нулю визначника третього порядку, складеного з їх координат:



Ця умова виконується в трьох випадках з чотирьох, оскільки при  прямі не належать одній площині і тому є мимобіжними.

Якщо дві прямі задані загальними рівняннями:

 і ,

то ми можемо розглянути систему рівнянь:

.

Взаємне розташування прямих характеризується кількістю розв’язків цієї системи. Якщо прямі співпадають, то система має нескінченну кількість розв’язків. Якщо прямі перетинаються, то ця система має єдиний розв’язок. У разі паралельних або мимобіжних прямих розв’язків немає. Останні два випадки можна розділити, якщо знайти напрямні вектори прямих. Для цього достатньо обчислити два векторних добутки  і , де . Якщо отримані вектори колінеарні, то задані прямі паралельні.

**◄Приклад 10.1.** Дослідити взаємне розташування прямих

 та 

**Розв’язання.** Напрямний вектор  прямої  знаходимо за канонічним рівнянням цієї прямої: . Напрямний вектор  прямої  обчислюємо за допомогою векторного добутку нормальних векторів площин, перетином яких вона є: .

Оскільки , то прямі паралельні або збігаються. З'ясуємо, яка з цих ситуацій реалізується для даних прямих. Для цього підставимо координати точки  в загальні рівняння прямої . Для першого з них отримуємо 1 = 0. Отже, точка не належить прямій  і прямі, що розглядаються, є паралельними.►

**10.4. Розташування прямої і площини**

Взаємне розташування прямої та площини у просторі допускає три випадки. Пряма і площина можуть перетинатися в одній точці. Вони можуть бути паралельними. Нарешті, пряма може належати площині. З'ясування конкретної ситуації для прямої і площини залежить від способу їх задання. Припустимо, що площина  задана загальним рівнянням  а пряма *L* - канонічним рівнянням

.

Рівняння прямої дають координати точки  на прямій і координати напрямного вектора  цієї прямої, а рівняння площини ― координати її нормального вектора *.*  
Якщо пряма *L* і площина  перетинаються, то напрямний вектор прямої не паралельний площині . Значить, нормальний вектор  площини не ортогональний вектору , тобто їх скалярний добуток не дорівнює нулю. Через коефіцієнти рівнянь прямої і площини ця умова записується у вигляді нерівності: .

Якщо пряма і площина паралельні або пряма належить площині, то виконується умова , яке в координатах зводиться до рівності  
.

Щоб розділити випадки "паралельні" і "пряма належить площині", потрібно перевірити, чи належить точка прямої даній площині.  
Таким чином, всі три випадки взаємного розташування прямої і площини розділяються шляхом перевірки відповідних умов:







Якщо пряма *L* задана своїм загальним рівнянням:

, то проаналізувати взаємне розташування прямої і площини  можна наступним чином. Із загальних рівнянь прямої та загального рівняння площини складемо систему трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими:



Якщо ця система не має розв’язків, то пряма паралельна площині. Якщо вона має єдиний розв’язок, то пряма і площина перетинаються в єдиній точці. Останнє рівнозначно тому, що визначник системи відмінний від нуля: .

Нарешті, якщо система має нескінченну кількість розв’язків, то пряма належить площині.

**10.5. Кут між прямою і площиною**

Кут  між прямою  і площиною  знаходиться в межах від 0° (в разі паралельності) до 90° (в разі перпендикулярності прямої і площини). Синус цього кута дорівнює , де -  - кут між напрямним вектором прямої і нормальним вектором площині (рис. 10.2):



Звідси



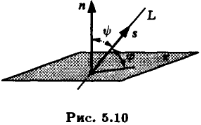


Рис 10.2. Кут між прямою і площиною

Умова перпендикулярності прямої і площини еквівалентна тому, що нормальний вектор площини і напрямний вектор прямої колінеарні. Через координати векторів ця умова записується у вигляді подвійного рівності:  


**10.6. Відстань до площини і до прямої**

**10.6.1. Відстань від точки до площини**

Розглянемо в просторі деяку площину  і довільну точку . Виберемо для площини одиничний нормальний вектор  з початком в деякій точці , і нехай  - відстань від точки  до площини . Тоді  (рис. 10.3), оскільки *.*

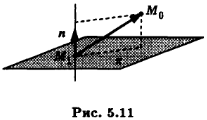


Рис. 10.3. Відстань від точки до площини

Якщо площина  задана в прямокутній системі координат своїм загальним рівнянням , то її нормальним вектором є вектор з координатами ( *А; B; C*) і за одиничний нормальний вектор можна вибрати  Нехай  і  - координати точок  і . Тоді виконується рівність:

,

оскільки точка  належить площині, і можна знайти координати вектора : .

Запишемо скалярний добуток  в координатній формі і зробимо перетворення:



оскільки . Отже, щоб обчислити відстань від точки до площини потрібно підставити координати точки в загальне рівняння площини, а потім результат за абсолютною величиною розділити на нормуючий множник, що дорівнює довжині відповідного нормального вектора.

**10.6.2. Відстань від точки до прямої**

Відстань від точки  до прямої *L*, заданої канонічним рівнянням:  може бути обчислено за допомогою векторного добутку. Дійсно, канонічні рівняння прямої дають нам точку  на прямій і напрямний вектор цієї прямої. Побудуємо паралелограм на векторах  і . Тоді відстань від точки  до прямої *L* дорівнюватиме висоті *h* паралелограма (рис. 10.4). Отже, потрібна відстань може бути обчислена за формулою:

,

де чисельник є площею цього паралелограма. Використовуючи формули обчислення довжини вектора і векторного добутки векторів через їх координати, отримуємо



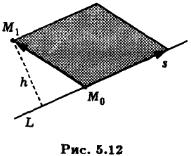


Рис. 10.4. Відстань від точки до прямої

**10.6.3. Відстань між прямими**

Про відстань між прямими має сенс говорити, якщо вони паралельні або є мимобіжними.

Щоб знайти **відстань між паралельними прямими**, достатньо обчислити відстань від довільної точки, наприклад, другий прямий до першої прямої. Таким чином, якщо дві паралельні прямі задані канонічними рівняннями  


то відстань між ними обчислюється за формулою:



**Відстань між мимобіжними прямими** можна знаходити, використовуючи змішаний добуток. Нехай, як і вище, прямі  і  задані канонічними рівняннями. Оскільки вони мимобіжні, їх напрямні вектори ,  і вектор , що з'єднує точки на прямих, некомпланарні. Тому на них можна побудувати паралелепіпед (рис. 10.5). Тоді відстань між прямими дорівнює висоті *h* цього паралелепіпеда. У свою чергу, висоту паралелепіпеда можна обчислити як відношення об'єму паралелепіпеда до площі його основи. Об'єм паралелепіпеда дорівнює модулю змішаного добутку трьох зазначених векторів, а площа паралелограма в основі паралелепіпеда дорівнює модулю векторного добутку напрямних векторів прямих. В результаті отримуємо формулу для відстані  між прямими: 

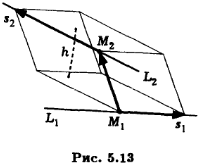


Рис. 10.5. Відстань між мимобіжними прямими

Запишемо змішаний і векторний добуток в координатах:



**10.6.4. Відстань між прямою і площиною**

Якщо пряма *L* і площина  перетинаються, то відстань між ними дорівнює нулю. Якщо ж вони паралельні, то відстанню від прямої до площини є відстань від будь-якої точки прямої до площини. Нехай площина задана загальним рівнянням , а пряма ― канонічним рівнянням 

Канонічне рівняння прямої дозволяє відразу знайти координати однієї точки на цій прямій: . Тому відстань  між прямою *L* і площиною , якій вона паралельна, дорівнює:



**10.7. Пучки і зв'язки**

**10.7.1. Пучок площин**

Пучком площин в просторі називають сукупність всіх площин, що містять фіксовану пряму. Пучок однозначно визначається будь-якою парою своїх різних площин. Будь-які дві непаралельних площини однозначно визначають певний пучок площин.  
Розглянемо питання про те, як, знаючи рівняння двох різних площин пучка, знайти рівняння інших площин пучка.  
**Теорема 10.1.** Для того, щоб площина належала пучку площин, що заданий парою непаралельних площин



необхідно і достатньо, щоб її загальне рівняння можна було записати у вигляді



**Доведення.** *Достатність***.** Покажемо, що при будь-яких значеннях параметрів  і, таких, що одночасно не дорівнюють нулю, рівняння  задає площину , що містить загальну пряму площин  і . Відзначимо, що після приведення подібних доданків отримаємо рівняння



що є рівнянням першого порядку, оскільки в ньому хоча б один коефіцієнт при змінних відмінний від нуля. Це рівняння площини.

Залишається перевірити, що ця площина проходить через пряму перетину площин  і . Але, якщо точка  належить одночасно площинах  і , то одночасно виконуються співвідношення



Отже, для координат точки  виконується і це співвідношення , тобто точка  лежить в площині . Тим самим ми показали, що точки перетину площин  і  лежать на площині .

*Необхідність.* Нехай площина  містить загальну пряму площин  і . Доведемо, що її рівняння можна записати у вигляді  при деяких значеннях параметрів  і. Зауважимо, що нормальні вектори  трьох площин , що мають спільну пряму, лежать в одній площині , що перпендикулярна цій загальній прямiй (рис. 10.6). Вектори  і  неколінеарнi, оскільки відповідні їм площини непаралельні. Тому ці два вектори утворюють базис в просторі  векторів, паралельних . Це означає, що вектор  є лінійною комбінацією векторів  і , тобто при деяких значеннях  і, 

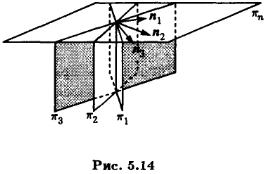


Рис. 10.6. Пучок площин

На прямій, що є спільною для трьох площин, зафіксуємо точку  і розглянемо довільну точку  і вектор   
Координати точки  задовольняють рівностям . За допомогою цих рівностей можна виразити вільні члени  і  в рівняннях площин через координати точки  і записати векторні рівняння цих площин:



Але тоді векторне рівняння  площини  перетвориться до співвідношення , або

.

Перетворюючи векторні рівняння площин  і  до їх загальних рівнянь, отримуємо рівняння виду , тобто площина  пучка описується цим рівнянням. ●

**10.7.2. Пучок прямих на площині**

Аналогічно пучку площин в просторі розглядають пучок прямих на площині. **Пучком прямих** на площині називають сукупність всіх прямих, що проходять через фіксовану точку площині. Пучок однозначно визначається будь-якою парою своїх прямих. Для пучка прямих на площині справедливий наступний аналог теореми 9.1.

**Теорема 10.2.** Для того щоб пряма входила в пучок прямих, який визначається парою непаралельних прямих



необхідно і достатньо, щоб її загальне рівняння можна було записати у вигляді .   
**10.7.3. Зв'язка площин**

**Зв'язкою площин** називають сукупність всіх площин в просторі з однією спільною точкою. Зв'язка площин однозначно визначається будь-якою трійкою своїх площин, що не належать одному пучку площин.

Дійсно, дві різні площини зв'язки перетинаються по прямій і визначають тим самим пучок площин.  
Якщо третя площина зв'язки не належить цьому пучку, то у таких трьох площин є єдина спільна точка, яка визначає зв'язку площин.

Три різні площини можуть не мати спільних точок (рис. 9.7, а), мати їх нескінченно багато (рис. 9.7, б) або мати єдину спільну точку. В перших двох випадках нормальні вектори площин компланарні. Якщо ж нормальні вектори трьох площин некомпланарнi, то про такі площини кажуть, що вони знаходяться в **загальному положенні**. Три площини, що знаходяться в загальному положенні, перетинаються в єдиній точці і однозначно визначають зв'язку площин. Це випливає з того, що умова некомпланарних нормальних векторів площин , в координатному записі означає, що визначник 

і це призводить до існування єдиного розв’язку системи трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими .

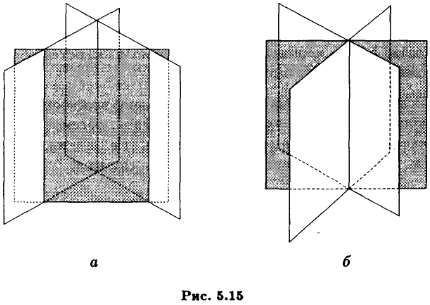


Рис 10.7. Зв’язка площин

**Теорема 10.3.** Для того щоб площина входила в зв'язку площин, яка визначається трійкою площин , загального положення, необхідно і достатньо, щоб її загальне рівняння можна було записати у вигляді  
де .  
Доведення аналогічне доведенню теореми 10.1. Різниця полягає лише в тому, що в разі пучка площин нормальні вектори двох непаралельних площин утворюють базис в , а нормальні вектори трьох площин загального положення утворюють базис в . ●

Якщо дана точка  то зв'язку площин, що проходять через цю точку, легко визначити, розглянувши три площини, паралельні координатним, тобто . За теоремою 10.3 отримаємо рівняння зв'язки: 

Коефіцієнти  і , ( координати нормального вектора площини в базисі з трьох нормальних векторів обраних площин), в даному випадку є його координатами в прямокутній системі координат.

**Додаток. Пряма і площина у просторі. Розв’язання задач.**

**Задача 1.** Знайти рівняння площини, що ділить двогранний кут між площинами  навпіл.

**Розв’язання.** Шукана площина – це геометричне місце точок, що рівновіддалені від двох заданих площин. Нехай точка (*x,y.z)* належить шуканій площині, тоді відстані від цієї точки до двох заданих площин рівні, отже: . . Отримані рівняння є рівняннями двох біссекторних взаємоперпендикулярних площин.

**Відповідь:** .

**Задача 2.** Написати рівняння площини, що рівновіддалена від двох заданих площин .

**Розв’язання.** Шукана площина – це геометричне місце точок, що рівновіддалені від двох заданих паралельних площин. Нехай точка (*x,y.z)* належить шуканій площині, тоді відстані від цієї точки до двох заданих площин рівні, отже: . . Отримане рівняння є рівнянням площини, що паралельна двом заданим і ділить відстань між ними навпіл.

**Відповідь:** .

**Задача 3.** Записати рівняння площини, що проходить через точку (2,1,-1) і відтинає від координатного кута піраміду з об’ємом 12 од. куб. Відрізки, що відтинаються на осях *Oy* і *Oz* однакові.

**Розв’язання.** Будемо шукати рівняння площини, як рівняння площини у відрізках: . Але, за умовою, . Підставивши координати точки отримаємо рівняння: . За формулою об’єму піраміди: . Шукані рівняння: і 

**Відповідь:** або .

**Задача 4.** Знайти рівняння площини, що рівновіддалена від двох заданих точок  і проходить через точку .

**Розв’язання.** Будемо шукати рівняння площини в загальному вигляді: . Вектор  буде вектором нормалі до шуканої площини. Тоді . Підставивши координати точки А, знайдемо D: .

**Відповідь:** .

**Задача 5.** Записати рівняння площини, що проходить через задані пряму  і точку (0,1,5).

**Розв’язання.** Вектором нормалі шуканої площини буде вектор векторного добутку напрямного вектора прямої і вектора , де М(0,2,-1) – точка, що належить прямій, а N(0,1,5) – задана точка. . Рівняння площини набуде вигляду: . Підставивши координати точки N(0,1,5), знайдемо D=-33.

**Відповідь:** .

**Задача 6.** Записати рівняння площини, що проходить через прямі  і .

**Розв’язання.** Перевіримо, чи можна провести через ці прямі площину: напрямні вектори площин і вектор , (де  і - точки, що належать прямим) повинні бути компланарними. Умова компланарності векторів: .

Отже, прямі мимобіжні і площину провести неможливо.

**Відповідь**: такої площини не існує.

**Задача 7.** Записати рівняння площини, що проходить через початок координат ортогонально прямій .

**Розв’язання.** Запишемо канонічне рівняння прямої: . Отже, пряма проходить через початок координат, а її напрямний вектор - це вектор нормалі шуканої площини. .

**Відповідь:** .

**Задача 8.** Знайти рівняння прямої, що проходить через точку М(3,-2,-4) паралельно площині  і такої, що перетинає пряму .

**Розв’язання.** Рівняння прямої будемо шукати в канонічному вигляді: . Напрямний вектор шуканої прямої і вектор нормалі площини ортогональні за умовою: . Умова перетину прямих: .

Маємо систему: .

.

**Відповідь:** .